Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcija "Vektor tangente" i "Normalna, oskulatorna i rektifikaciona ravan")

Tablica 3.

Vektorske jednadžbe	Skalarne jednadžbe
Tangenta:	
$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \mu \dot{\vec{r}}(t_0)$	$\dfrac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \dfrac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \dfrac{z - z_0}{\dot{z}_0}$
Glavna normala:	
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu \,[(\dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0) \times \dot{\vec{r}}_0]$	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ m & n \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ n & l \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ l & m \end{vmatrix}}$ Gdje je: $l = \begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix}$
Binormala:	
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu \,(\dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0)$	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix}}$
Normalna ravnina:	
$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \dot{\vec{r}}_0 = 0$	$\dot{x}_0 (x - x_0) + \dot{y}_0 (y - y_0) + \dot{z}_0 (z - z_0) = 0$
Rektifikaciona ravnina:	
$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot [(\dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0) \times \dot{\vec{r}}_0] = 0$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$
Oskulaciona ravnina:	
$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0) = 0$ ili $(\vec{r} - \vec{r}_0,\ \dot{\vec{r}}_0,\ \ddot{\vec{r}}_0) = 0$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0$

Zadaci

89. Neka se dokažu formule iz tablica 1, 2. i 3.

1° Dokažimo najprije formule iz tablica 1. i 2.

a) Neka je $\vec{r}=\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$ vektorska jednadžba krivulje $\alpha: I\to E^3$ (s je duljina luka te krivulje. U točki $\alpha(s_0)$, $s_0\in I$ krivulje) α prema § 4.1. definiran je vektor tangente s:

$$\vec{t}^{\,0}(s_0)=\frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)=\vec{r}_0{}'=x_0{}'\vec{i}+y_0{}'\vec{j}+z_0'\vec{k}.$$

Kako točka $\alpha(s_0)$ leži i na krivulji α, to vrijedi:

$$\vec{r}_0=\vec{r}(s_0)=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k},$$

a kako je vektor $\vec{r}-\vec{r}_0$ kolinearan s vektorom $\vec{t}^{\,0}(s_0)=\vec{r}_0{}'$, to *vektorska jednadžba tangente* glasi:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\mu\vec{r}_0',$$

a *skalarne jednadžbe tangente* glase:

$$\frac{x-x_0}{x_0{}'}=\frac{y-y_0}{y_0{}'}=\frac{z-z_0}{z_0{}'}.$$

Ova jednadžba zove se još kanonski oblik jednadžbe tangente. Tangenta u točki $\alpha(s_0)$ krivulje α kolinearna je s vektorom normale na normalnu ravninu, pa *vektorska jednadžba normalne ravnine* glasi:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{r}_0{}'=0,$$

a skalarna jednadžba:

$$x_0{}'(x-x_0)+y_0{}'(y-y_0)+z_0{}'(z-z_0)=0.$$

b) Neka je $\vec{r}=\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$ vektorska jednadžba krivulje $\alpha: I\to E^3$. U točki $\alpha(s_0)$, $s_0\in I$ krivulje α prema § 4.1. definiran je vektor glavne normale s:

$$\vec{n}^{\,0}(s_0)=\frac{\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}(s_0)}{\left|\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}(s_0)\right|}=\frac{\vec{r}''(s_0)}{|\vec{r}''(s_0)|}=\frac{\vec{r}_0{}''}{|\vec{r}_0{}''|}=\frac{x_0{}''\vec{i}+y_0{}''\vec{j}+z_0{}''\vec{k}}{\sqrt{x_0{}''^2+y_0{}''^2+z_0{}''^2}}.$$

Kako je vektor $\vec{r}-\vec{r}_0$ kolinearan s vektorom $\vec{n}^{\,0}(s_0)=\dfrac{\vec{r}_0{}''}{|\vec{r}_0{}''|}$,

to *vektorska jednadžba glavne normale* glasi:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\mu_1\frac{\vec{r}_0{}''}{|\vec{r}_0{}''|},$$

odnosno

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\mu\,\vec{r}_0{}'',\qquad\left(\mu=\frac{\mu_1}{|\vec{r}_0{}''|}\right),\text{ a}$$

njene skalarne jednadžbe (kanonski oblik jednadžbe):

$$\frac{x - x_0}{x_0''} = \frac{y - y_0}{y_0''} = \frac{z - z_0}{z_0''}.$$

Glavna normala u točki $\alpha(s_0)$ krivulje α kolinearna je s vektorom normale na rektifikacionu ravninu, pa *vektorska jednadžba rektifikacione* ravnine glasi:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{r}_0''}{|\vec{r}_0''|} = 0,$$

odnosno:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_0'' = 0,$$

a njena skalarna jednadžba:

$$x_0''(x - x_0) + y_0''(y - y_0) + z_0''(z - z_0) = 0.$$

c) Neka je zadana krivulja kao u a) i b).

U točki $\alpha(s_0)$, $s_0 \in I$ krivulje α definiran je prema § 4.1. vektor binormale s:

$$\vec{b}^0(s_0) = \vec{t}^0(s_0) \times \vec{n}^0(s_0).$$

Tada je:

$$\vec{b}^0(s_0) = \vec{r}_0' \times \frac{\vec{r}_0''}{|\vec{r}_0''|} = \mu_1(\vec{r}_0' \times \vec{r}_0''), \qquad \left(\mu_1 = \frac{1}{|\vec{r}_0''|}\right).$$

Odnosno:

$$\vec{b}^0(s_0) = \mu_1 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} =$$

$$= \mu_1 \left\{ \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} \vec{k} \right\}.$$

Vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ kolinearan je s vektorom $\vec{b}^0(s_0)$, pa *vektorska jednadžba binormale* glasi:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu_2 \vec{b}(s_0),$$

odnosno:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu(\vec{r}_0' \times \vec{r}_0''), \qquad (\mu = \mu_1 \mu_2),$$

a njene skalarne jednadžbe (kanonski oblik jednadžbe):

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix}};$$

Binormala je u točki $\alpha(s_0)$ krivulje α kolinearna s vektorom normale na oskulacionu ravninu, pa *vektorska jednadžba oskulacione* ravnine glasi:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}_0{}'\times\vec{r}_0{}'')=0,$$

odnosno:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0,\ \vec{r}_0{}',\ \vec{r}_0{}'')=0,$$

a njena skalarna jednadžba:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0{}' & y_0{}' & z_0{}' \\ x_0{}'' & y_0{}'' & z_0{}'' \end{vmatrix}=0.$$

2° Dokažimo formule iz tablice 3.
Krivulja α je sada dana jednadžbom:

$$\vec{r}=\vec{r}(t).$$

Vektorsku funkciju $\vec{r}=\vec{r}(t)$ reparametrizirajmo duljinom luka funkcijom:

$$t=t(s).$$

Vektor tangente $\vec{t}^{\,0}(s)$ dobijemo deriviranjem jednadžbe:

$$\vec{r}=\vec{r}(t(s))$$

po s:

$$\vec{t}^{\,0}(s)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}. \tag{5}$$

Odavde proizlazi da su vektori

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\ \text{i}\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

kolinearni i istog smjera, jer je prema § 3:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|}>0.$$

Vektor tangente je dakle:

$$\vec{t}^{\,0}(t)=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|}=\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}. \tag{6}$$

Vektor binormale dobijemo deriviranjem po s jednadžbe (5):

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}. \tag{7}$$

iz (5) i (7) proizlazi:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} - \frac{d^2 t}{ds^2}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\vec{r}}{ds}. \tag{8}$$

Odavde zaključujemo da vektori $\frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ razapinju oskulacíonu ravninu, jer je (8) linearna kombinacija vektora tangente $\frac{d\vec{r}}{ds}$ i vektora glavne normale $\dfrac{\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}$, odnosno vektora $\frac{d\vec{r}}{ds^2}$ i $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$. Kako ti vektori razapinju oskulacionu ravninu, to u njoj leže vektori $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ i $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Dakle, *vektor binormale* jest:

$$\vec{b}^{\,0}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|} = \frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}. \tag{9}$$

Vektor glavne normale je očito:

$$\vec{n}^{\,0}(t) = \vec{b}^{\,0}(t)\times\vec{t}^{\,0}(t). \tag{10}$$

Neka je, dakle, zadana krivulja $\alpha : J \to E^3$ svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}.$$

U točki $\alpha(t_0)$, $t_0 \in J$ krivulje dan je:

vektor tangente:

$$\vec{t}^{\,0}(t_0) = \frac{\dot{\vec{r}}_0}{|\dot{\vec{r}}_0|} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|}\,(\dot{x}_0\,\vec{i} + \dot{y}_0\,\vec{j} + \dot{z}_0\,\vec{k}), \tag{11}$$

vektor binormale:

$$\vec{b}^{\,0}(t_0) = \frac{\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0}{|\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0|} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0|}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$\vec{b}^{\,0}(t) = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0|}\,(l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}),$$

gdje je:

$$l = \begin{vmatrix} \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} \dot{z}_0 & \dot{x}_0 \\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} \dot{x}_0 & \dot{y}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

i vektor glavne normale, kojeg u koordinatama dobijemo ovako:

$$\vec{n}^{0}(t_0)=\vec{b}^{0}(t_0)\times\vec{t}^{0}(t_0)=\frac{\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0}{|\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0|}\times\frac{\dot{\vec{r}}_0}{|\dot{\vec{r}}_0|}, \tag{14}$$

$$\vec{n}^{0}(t_0)=\mu_1\,[(\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0)\times\dot{\vec{r}}_0],\quad \left(\mu_1=\frac{1}{|\dot{\vec{r}}_0|\,|\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0|}\right).$$

Izračunajmo $(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}^{2}\ddot{\vec{r}}-\dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}})$ u koordinatama. Kako je:

$$\dot{\vec{r}}^{2}\ddot{\vec{r}}=(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\quad(\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k})$$
$$(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}=(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})\quad(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}),$$

to je:

$$\begin{aligned}(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}=&\,[(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,\ddot{x}-(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})\dot{x}]\,\vec{i}+\\&+[(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,\ddot{y}-(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})\dot{y}]\,\vec{j}+\\&+[(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\,\ddot{z}-(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})\dot{z}]\,\vec{k},\end{aligned}$$

$$(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}=-\begin{vmatrix}\dot{y}&\dot{z}\\m&n\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\dot{z}&\dot{x}\\n&l\end{vmatrix}\vec{j}-\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}\\l&m\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\l&m&n\end{vmatrix}, \tag{15}$$

uz oznake (13).

Vektorske jednadžbe *tangente, glavne normale* i *binormale* u točki $\alpha(t_0)$ krivulje α očito glase:

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\vec{r}_0+\mu\,\dot{\vec{r}}_0,\\\vec{r}&=\vec{r}_0+\mu\,[(\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0)\times\dot{\vec{r}}_0],\\\vec{r}&=\vec{r}_0+\mu\,[\dot{\vec{r}}_0\times\ddot{\vec{r}}_0],\end{aligned}\tag{16}$$

dok njihove skalarne jednadžbe proizlaze iz (16), (11), (12) i (15) uz oznake (13) i glase kao u Tablici 3. Vektorske i skalarne jednadžbe normalne, rektifikacione i oskulacione ravnine također se lako izvode kao u slučaju iz Tablice 2.

90. Naći one tangente krivulje $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$ dane sa:

$\vec{r}=\{t,\ t^2,\ t^3\}$,

koje su paralelne s ravninom $x+2y+z-3=0$.

Vektor smjera tangente jest:

$\dot{\vec{r}}=\{1,\ 2t,\ 3t^2\}$.

Treba naći diralište tangenti i krivulje α. To će biti točka u kojima je vektor tangente okomit na vektor normale $\vec{N}=\{1,\ 2,\ 1\}$ zadane ravnine, tj. kada je $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{N}=0$. To daje uvjet:

$$3t^2 + 4t + 1 = 0.$$

Rješenja su $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -1$, a dirališta:

$$D_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right), \qquad D_2 = (-1, 1, -1).$$

Tangente prema tome imaju jednadžbe:

$$\frac{x + \frac{1}{3}}{1} = \frac{y - \frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{z + \frac{1}{27}}{\frac{3}{9}},$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3},$$

odnosno:

$$\frac{3x+1}{1} = \frac{9y-1}{-2} = \frac{27z+1}{3},$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3},$$

91. Dokazati da tangente krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ dane sa:

$$x = a(\sin t + \cos t)$$
$$y = a(\sin t - \cos t)$$
$$z = b\mathrm{e}^{-t}$$

sijeku ravninu XOY u kružnici $x^2 + y^2 = 4a^2$.

Kanonski oblik jednadžbe tangente glasi:

$$\frac{x - a(\sin t + \cos t)}{a(\cos t - \sin t)} = \frac{y - a(\sin t - \cos t)}{a(\cos t + \sin t)} = \frac{z - b\mathrm{e}^{-t}}{-b\mathrm{e}^{-t}},$$

a u parametarskom obliku:

$x = a(\cos t - \sin t)\,\lambda + a(\sin t + \cos t)$,

$y = a(\cos t + \sin t)\,\lambda + a(\sin t - \cos t)$, $\quad z = -be^{-t}\,\lambda + be^{-t}$.

Sjecišta tangenata s ravninom XOY dobivamo za one λ za koje je $z = 0$, tj. za $\lambda = 1$, dakle:

$$x = 2a \cos t,$$
$$y = 2a \sin t.$$

a to su parametarske jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 = 4a^2$.

92. Naći normalnu ravninu krivulje:

$$z = x^2 + y^2$$
$$y = x$$

u točki $x = 1$.

Parametarske jednadžbe krivulje glase ako uzmemo za parametar apscisu x:

$$\vec{r} = \{x,\ x,\ 2x^2\}.$$

Vektor normale na normalnu ravninu ima smjer:

$$\dot{\vec{r}} = \{1,\ 1,\ 4x\},$$

pa jednadžba normalne ravnine glasi:

$$(X-x) + (Y-x) + 4x(Z-2x^2) = 0,$$

a u traženoj točki $T = (1,\ 1,\ 2)$:

$$(X-1) + (Y-1) + 4(Z-2) = 0,$$

odnosno:

$$X + Y + 4Z - 10 = 0.$$

93. Naći jednadžbu binormale krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4\cos\frac{t}{2} \text{ u točki } t = \pi.$$

Smjer binormale određen je vektorom:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\cos t & \sin t & -2\sin\frac{t}{2} \\ \sin t & \cos t & -\cos\frac{t}{2} \end{vmatrix} = -2\sin^2\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\vec{j} + \vec{k}\right),$$

pa jednadžba glasi:

$$\frac{x-(t-\sin t)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{y-(1-\cos t)}{\cos\frac{t}{2}} = \frac{z-4\cos\frac{t}{2}}{1},$$

a u točki $T = (\pi,\ 2,\ 0)$:

$$\frac{x-\pi}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}.$$

94. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$y^2 = x,\ x^2 = z, \text{ u točki } T = (1,\ 1,\ 1).$$

Parametarske jednadžbe krivulje jesu:

$$x = t^2,\ y = t,\ z = t^4,$$

a oskulaciona ravnina ima jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} x-t^2 & y-t & z-t^4 \\ 2t & 1 & 4t^3 \\ 2 & 0 & 12t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno:

$$12t^2x - 16t^3y - 2z + 6t^4 = 0.$$

Odavde za $t = 1$ dobivamo

$$6x - 8y - z + 3 = 0.$$

95. Napisati jednadžbu rektifikacione ravnine krivulje $\alpha : (0, \pi) \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \ln \sin t \right\} \quad \text{u točki} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Vektor normale $\vec{n}$ rektifikacione ravnine je kolinearan s vektorom $(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}$.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sin t} \right\},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left\{ 0,\ 0,\ -\frac{1}{\sin^2 t} \right\},$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}),$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t},$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 t}.$$

Tada je:

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{\sin^2 t}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\vec{k}\right) + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \operatorname{ctg} t\,\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}}\vec{j} - \vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 t}(\operatorname{ctg} t\,\vec{i} + \operatorname{ctg} t\,\vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{k}).$$

Jednadžba rektifikacione ravnine glasi:

$$\operatorname{ctg} t\left(X - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{ctg} t\left(Y - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}(Z - \ln \sin t) = 0.$$

Jednadžba rektifikacione ravnine u točki $t = \dfrac{\pi}{2}$ glasi:

$$Z = 0.$$

96. Odrediti funkciju $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tako da glavna normala krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ t,\ \sin t,\ \phi(t) \}$$

bude paralelna s YOZ ravninom.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}} = \{ 1,\ \cos t,\ \dot{\phi} \},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \{ 0,\ -\sin t,\ \ddot{\phi} \}.$$

Vektor glavne normale ima smjer:

$$(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}),$$
$$\dot{\vec{r}}^2 = 1+\cos^2 t+\dot{\phi}^2,$$
$$\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = -\sin t\cos t+\dot{\phi}\ddot{\phi},$$
$$(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}} = (1+\cos^2 t+\dot{\phi}^2)\,(-\sin t\,\vec{j}+\ddot{\phi}\vec{k}) -$$
$$-\,(-\sin t\cos t+\dot{\phi}\ddot{\phi})\;(\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\dot{\phi}\vec{k}).$$

Da bi glavna normala bila paralelna s YOZ ravninom, mora koordinata uz $\vec{i}$ biti jednaka nuli, dakle:

$$-\sin t\cos t+\dot{\phi}\ddot{\phi} = 0.$$

Riješimo ovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{1}{2}\;\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}^2}{\mathrm{d}t} = \sin t\cos t,$$

$$\dot{\phi}^2 = \sin^2 t + c^2,$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\sin^2 t+c^2} = c\sqrt{1+\left(\frac{\sin t}{c}\right)^2} = \sqrt{c^2+1-\cos^2 t},$$

$$\phi(t) = K_1\left[\int\sqrt{1-\left(\frac{\cos t}{K_1}\right)^2}\,\mathrm{d}t+K_2\right],\ \text{gdje je}\ K_1 = \sqrt{c^2+1}$$
$$c = \text{konst.}$$

(ili uzeti supstituciju $\dot{\phi} = z,\ \ddot{\phi} = \dot{z}$).

97. Napisati jednadžbu tangente, glavne normale i binormale za kružnu zavojnicu $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$:

$$\vec{r} = \{a\cos t,\ a\sin t,\ b\,t\}$$

u proizvoljnoj točki.

Dokazati da glavna normala siječe os zavojnice pod pravim kutom, a binormala zatvara s tom osi konstantan kut.

Prvi način:

Jednadžbe tangente, glavne normale, odnosno binormale glase u vektorskom obliku:

$$\vec{\varrho} = \vec{r}(t)+\mu[\dot{\vec{r}}\ (t)],$$
$$\vec{\varrho} = \vec{r}(t)+\mu[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}],\ \text{odnosno}$$
$$\vec{\varrho} = \vec{r}(t)+\mu[\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}].$$

Računajmo:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\},$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \{-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0\},$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = a^2 + b^2,$$
$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}^2 - \dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}).$$

Jer je $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{a^2 + b^2} =$ konst., to je vektor $\dot{\vec{r}}$ okomit na svojoj derivaciji, tj. $\dot{\vec{r}} \perp \ddot{\vec{r}}$, pa je $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$. Zbog toga je smjer glavne normale:

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}^2 \cdot \ddot{\vec{r}} = -a(a^2 + b^2)\,[\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}].$$

Nadalje, binormala ima smjer:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\,\vec{i} - ab\cos t\,\vec{j} + a^2\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = a\,[\,b\sin t\,\vec{i} - b\cos t\,\vec{j} + a\,\vec{k}\,].$$

Jednadžba tangente je prema tome:

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - bt}{b}.$$

Jednadžba glavne normale:

$$\frac{X - a\cos t}{-a(a^2 + b^2)\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{-a(a^2 + b^2)\sin t} = \frac{Z - bt}{0}, \quad \text{odnosno}$$

$$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t} = \frac{Z - bt}{0},$$

dok jednadžba binormale glasi:

$$\frac{X - a\cos t}{ab\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-ab\cos t} = \frac{Z - bt}{a^2}, \quad \text{odnosno:}$$

$$\frac{X - a\cos t}{b\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-b\cos t} = \frac{Z - bt}{a}.$$

Nađimo kut između glavne normale i osi zavojnice, tj. kut između vektora:

$$\vec{n} = \{\cos t,\ \sin t,\ 0\} \quad \text{i} \quad \vec{k} = \{0,\ 0,\ 1\}:$$

$$\cos\phi = 0, \quad \text{pa je } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Kut između binormale i osi zavojnice jest kut između vektora:

$$\vec{b} = \{b\sin t,\ -b\cos t,\ a\} \ \text{i}\ \vec{k} = \{0, 0, 1\}:$$

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

Drugi način:

Jednostavnije se zadatak rješava reparametrizacijom duljinom luka. Prema zad. 62. kružna zavojnica α ima jednadžbu

$$\left(t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right):$$

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Kako je:

$$\vec{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{i} + a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{j} + b\vec{k}\right],$$

$$\vec{r}''(s) = \frac{a}{a^2+b^2}\left[-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{i} - \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{j} + 0\vec{k}\right],$$

$$\vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s) = \frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{i} - b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{j} + a\vec{k}\right],$$

to prema Tablici 1. na str. 42. i uz $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ za jednadžbe tangente, glavne normale i binormale dobivaju se već poznate jednadžbe.

98. Naći jednadžbe tangente, glavne normale, binormale, normalne, rektifikacione i oskulacione ravnine krivulje (vidi zad. 179):

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$y^2 - 2x + z = 0,$$

u točki $T = (1, 1, 1)$.

Napišimo na zadanu krivulju parametarske (ili vektorsku) jednadžbe: Budući da je projekcija grafa krivulje na XOZ ravninu kružnica:

$$x^2 + z^2 - 2x + z = 1, \quad \text{odnosno:}$$
$$(x-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

to uvedimo parametar ϕ ovako:

$$x = 1 + \frac{3}{2}\cos\phi,$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin\phi,$$

pa je tada:

$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{2} + 3\cos\phi - \frac{3}{2}\sin\phi}.$$

U ovom obliku je (zbog komponente y) nespretno računati derivacije krivulje. Zbog toga ćemo uzeti za parametar apscisu x, pa će krivulja imati vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y(x)\,\vec{j} + z(x)\,\vec{k}.$$

Komponente y i z su ovdje funkcije od x, koje ćemo, kao i njene derivacije, naći iz zadane krivulje na sljedeći način:

Uvijek je: $x = x, \quad \dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dddot{x} = 0, \; \ldots$

Nađimo prvu derivaciju krivulje, tj. $\dot{\vec{r}}$:

$$2x - 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0,$$
$$2y\dot{y} - 2 + \dot{z} = 0.$$

U točki T ovaj sustav jednadžbi glasi:

$$1 - \dot{y} + \dot{z} = 0,$$
$$2 - 2 + \dot{z} = 0,$$

odakle dobivamo: $\dot{z} = 0$, $\dot{y} = 1$, pa je prva derivacija u točki T:

$$\dot{\vec{r}}_T = \vec{i} + \vec{j}.$$

Druga derivacija dobije se iz:

$$1 - \dot{y}^2 - y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0,$$
$$2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$

u točki T:

$$1 - 1 - \ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$
$$2 + 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0,$$

odakle je $\ddot{y} = -\dfrac{2}{3}$, $\ddot{z} = -\dfrac{2}{3}$, pa je:

$$\ddot{\vec{r}}_T = -\frac{2}{3}\,\vec{j} - \frac{2}{3}\,\vec{k}.$$

Treća derivacija se dobije ponovnim deriviranjem malo prije dobivenog sustava:

$$-3\dot{y}\ddot{y} - y\dddot{y} + 3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z} = 0,$$
$$6\dot{y}\ddot{y} + 2y\dddot{y} + \dddot{z} = 0,$$

u točki T:

$$2 - \dddot{y} + z\,\dddot{z} = 0,$$
$$-4 + 2y\dddot{y} + \dddot{z} = 0,$$

odakle je $\dddot{y} = 2$, $\dddot{z} = 0$, pa je:

$$\dddot{\vec{r}} = 2\,\vec{j}.$$

Tada je jednadžba tangente:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Izračunajmo smjer glavne normale:

$$\ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}^2) - \dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}) = 2\left[-\frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right] + \frac{2}{3}[\vec{i}+\vec{j}] = \frac{2}{3}(\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}),$$

pa glavna normala ima jednadžbu:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Smjer binormale određen je vektorom:

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}),$$

a binormala ima jednadžbu:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Normalna ravnina ima jednadžbu:

$$1(x-1) + 1(y-1) = 0,$$

odnosno:

$$x + y - 2 = 0,$$

oskulaciona ravnina:

$$-\frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) - \frac{2}{3}(z-1) = 0,$$

odnosno:

$$x - y + z - 1 = 0,$$

a rektifikaciona ravnina:

$$\frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(y-1) - \frac{4}{3}(z-1) = 0,$$

odnosno:

$$x - y - 2z + 2 = 0.$$

99. Naći trobrid pratilac za heliks (zavojnicu) $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$$

Prema zadatku 97. imamo ort tangente, glavne normale i binormale:

$$\vec{t}^{\,\circ} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\vec{t}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k}),$$

$$\vec{n}^\circ = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{a(a^2+b^2)}{a(a^2+b^2)}(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}) = -(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}),$$

$$\vec{b}^\circ = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a}{a\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,\vec{i}-b\cos t\,\vec{j}+a\vec{k}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,\vec{i}-b\cos t\,\vec{j}+a\vec{k}).$$

Normalna ravnina ima jednadžbu:

$$-a\sin t\,X + a\cos t\,Y + b\,Z - b^2 t = 0,$$

binormalna:

$$\cos t\,X + \sin t\,Y - a = 0,$$

a oskulaciona:

$$b\sin t\,X - b\cos t\,Y + a\,Z - ab\,t = 0.$$

Uočimo da je radijvektor projekcije neke točke zavojnice na ravninu XOY, tj. vektor $\vec{r} = \{a\cos t,\ a\sin t,\ 0\}$ suprotne orijentacije s vektorom $\vec{n}^\circ$. Vektor $\vec{n}^\circ$ ima, dakle, orijentaciju prema osi zavojnice i prema zad. 97. zatvara s njom pravi kut (vidi zad. 54, 58, 62, 97, 163, 197).

100. Zadana je krivulja $\alpha: \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{a\cos t,\ a\sin t,\ af(t)\},$$

gdje je $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dvaput diferencijalna funkcija.

Odrediti $f(t)$ tako da oskulaciona ravnina krivulje α zatvara konstantan kut sa osi Z.

Normalni vektor oskulacione ravnine ima smjer određen vcektorom:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & -a\cos t & a\dot{f} \\ -a\cos t & -a\sin t & a\ddot{f} \end{vmatrix} =$$

$$= a^2(\ddot{f}\cos t + \dot{f}\sin t)\,\vec{i} + a^2(\ddot{f}\sin t - \dot{f}\cos t)\,\vec{j} + a^2\vec{k}.$$

Neka je α kut što ga normalni vektor oskulacione ravnine zatvara s osi Z, tada je

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{k}}{|\vec{N}|\ |\vec{k}|} = \frac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\cdot\vec{k}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|} =$$

$$= \frac{a^2}{a^2\sqrt{\ddot{f}^2+\dot{f}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\ddot{f}^2+\dot{f}^2+1}}.$$

Riješimo diferencijalnu jednadžbu:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{f''^2+f'^2+1}}.$$

Dalje je:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=f''^2+f'^2+1,$$

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=f''^2+f'^2,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha=f''^2+f'^2. \tag{1}$$

Uzmimo supstituciju: $f'=u$, $f''=u'$ i označimo $\operatorname{tg}^2\alpha=k^2$, dolazimo do diferencijalne jednadžbe:

$$u'^2+u^2=k^2 \tag{2}$$

$$u'=\pm\sqrt{k^2-u^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{k^2-u^2}}=\pm\,\mathrm{d}t,\quad \text{ako je } k^2-u^2\neq 0.$$

$$\arcsin\frac{u}{k}=c_1\pm t,$$

$$u=k\sin(c_1\pm t),$$

$$f(t)=k\cos(c_1\pm t)+c_2,$$

$$f(t)=c_2+\operatorname{tg}\alpha\cos(c_1\pm t).$$

Singularno rješenje diferencijalne jednadžbe (2) dobijemo ako je:

$$k^2-u^2=0.$$

Tada je:

$$u=\pm k,$$

što zadovoljava jednadžbu (2).

Nadalje je:

$$\mathrm{u}=f'=\pm k,$$

odnosno:

$$f(t)=C_3\pm kt,$$

pa je to singularno rješenje.

Specijalno, za $C_3=0$, $\pm k=b$, imamo:

$$f(t)=bt,$$

što predstavlja kružnu zavojnicu (vidi zad. 54).

U zadacima 101–105. naći jednadžbu tangente krivulja:

101. $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ u točki $T=(1,3,4)$.
102. $2x^2+3y^2+z^2=47$, $x^2+2y^2=z$ u točki $T=(-2,1,6)$.
103. $xy^2+z^3=12$, $x+y+2z-7=0$ u točki $T=(1,2,2)$.
104. $3x^2+2y^2+y^4-z=0$, $x^2-y^2+z^2-36=0$ u točki $M=(-1,1,6)$.
105. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ za $t=0$.

106. Napisati jednadžbu tangente na krivulju:

$$\alpha : \mathbf{R} \to E^3:$$

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \sin \frac{t}{2}$$

u točki $t = 0$. Naći kut što ga tangenta zatvara s osi OZ.

107. U kojim je točkama tangenta na krivulju $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$$

paralelna s ravninom:

$$3x + y + z + 2 = 0?$$

108. Napisati jednadžbu tangente na krivulju $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{a \operatorname{ch} t, \ a \operatorname{sh} t, \ c t\}$$

u proizvoljnoj točki.

109. Pokazati da tangenta krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{t, \ \frac{t^2}{3}, \ \frac{2t^3}{27}\right\}$$

zatvara konstantan kut s vektorom
$\vec{a} = \{1, 0, 1\}$. Koliki je taj kut?

110. U kojim točkama je tangenta krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{3t - t^3, \ 3t^2, \ 3t + t^3\}$$

paralelna s koordinatnim ravninama?

111. Napisati jednadžbu tangente krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{a \cos t, \ -a \sin t, \ b\,\mathrm{e}^t\}$$

i naći geometrijsko mjesto sjecišta tangenata i ravnine XOY.

112. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine zavojnice $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{2 \cos t, \ 2 \sin t, \ 4t\}$$

u točki $t = 0$.

113. Zadana je krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{t, \ t^2, \ t^3\}.$$

Koja krivulja se dobije kao presjek tangenata krivulje α s ravninom XOY?

114. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine Vivijanieve krivulje (vidi zad. 55).

115. Dokazati da je udaljenost između neke točke $\vec{r}(t)$ na zavojnici $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{a \cos t, \ a \sin t, \ b t\}$$

i sjecišta tangente u toj točki s ravninom XOY jednako $k\,|t|$, gdje je k neka konstanta.

116. Pokazati da je kut između tangente krivulje $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow E^3$:

$$\vec{r} = \left\{ \cos^2 t,\ \frac{1}{2} \sin 2t,\ \sin t \right\},$$

i radijvektora dirališta konstantan.

117. Dana je krivulja $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow E^3$:

$$\vec{r} = \{ x,\ \phi_1(x),\ \phi_2(x) \},$$

gdje su $\phi_1,\ \phi_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Ako postoje $\phi'_1(x_0)$ i $\phi'_2(x_0)$ pokazati da krivulja ne može imati za $x = x_0$ tangentu okomitu na os OX.

118. Za krivulju $\alpha : I \rightarrow E^3$ zadanu sa $\vec{r} = \vec{r}(s)$ (s je duljina luka) definira se *sferna indikatrisa tangenata* kao krivulja $\beta : I \rightarrow E^3$ koja je dana jednadžbom:

$$\vec{R}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}(s).$$

Očito graf od β leži na jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu.
Naći jednadžbu sferne indikatrise tangenata obične zavojnice.

119. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine krivulje koja je zadana kao presjek dviju ploha:

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \qquad \Phi(x,\ y,\ z) = 0.$$

120. Napisati jednadžbu tangente i normalne ravnine krivulje:

$$x^2 = 2az,\ y^2 = 2bz$$

u proizvoljnoj točki.

121. Naći jednadžbu normalne ravnine u proizvoljnoj točki krivulje:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

122. Naći jednadžbu normalne ravnine u proizvoljnoj točki krivulje:

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad y^2 + z^2 = 1.$$

123. Dokazati da sve normalne ravnine krivulje $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow E^3$:

$$\vec{r} = \{ a \sin^2 t,\ a \sin t \cos t,\ a \cos t \}$$

prolaze istom točkom. Koja je to točka?

124. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow E^3$:

$$\vec{r} = \{ e^t,\ e^{-t},\ t\sqrt{2} \}$$

u proizvoljnoj točki krivulje.

125. Naći one oskulacione ravnine krivulje $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow E^2$:

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$$

koje prolaze točkom $M = \left(2,\ -\frac{1}{3},\ -6 \right)$.

126. Naći oskulacionu ravninu krivulje $\alpha : [0, \pi] \to E^3$:

$$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos^2 t$$

u njezinoj proizvoljnoj točki.

127. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ t\cos t,\ -t\sin t,\ a t \}$$

u ishodištu koordinatnog sustava.

128. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ a\cos t,\ b\sin t,\ \mathrm{e}^t \}$$

u točki $t = 0$.

129. Pokazati da pravac koji prolazi proizvoljnom točkom M krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t,\ y = t,\ z = t^3$$

paralelno s ravninom $z = 0$ do sjecišta s osi OZ, leži u oskulacionoj ravnini pridruženoj točki M.

130. Napisati jednadžbu oskulacione ravnine krivulje:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad x^2 - y^2 = 3$$

u točki $M = (2, 1, 2)$.

131. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \qquad x + y + z = 0$$

u točki $M = (1, 1, -2)$.

132. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$y^2 + 4z^2 + 2ax - 2a^2 = 0,$$
$$4x + 3y + 2z - 5a = 0.$$

$$\text{u točki } M = \left(\frac{a}{2}, \frac{4}{5}a, \frac{3}{10}a \right).$$

133. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$y = \phi(x), \quad z = a\phi(x) + b,$$

(gdje je $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bar dva puta diferencijabilna funkcija) u proizvoljnoj točki krivulje.

134. Naći oskulacionu ravninu krivulje:

$$x^2 = 2az,\ y^2 = 2bz$$

u proizvoljnoj točki krivulje.

135. Dokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = \mathrm{e}^t \cos t,\ y = \mathrm{e}^t \sin t,\ z = 2t$$

leži na plohi:

$$x^2 + y^2 - e^z = 0$$

i da se njezina oskulaciona ravnina poklapa s tangentnom ravninom plohe.

136. Ako oskulacione ravnine krivulje prolaze fiksnom točkom, dokazati da je krivulja ravninska (vidi zad. 162).

137. Dokazati da svaka oskulaciona ravnina kružne zavojnice siječe kružni valjak na kome se nalazi po elipsi konstantnih poluosi. U zadacima 138–142. naći glavnu normalu i binormalu krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$.

138. $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$ u točki $t = 0$.

139. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ u točki $t = 1$.

140. $x = \dfrac{t^2}{2}$, $y = \dfrac{2t^3}{3}$, $z = \dfrac{t^4}{2}$, u točki $t = 1$.

141. $x = y^2$, $x^2 = z$ u točki $M = (1, 1, 1)$.

142. $xy = z^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ u točki $M = (1, 1, 1)$.

U zadacima 143–145. naći jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale u proizvoljnoj točki krivulja α:

143. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$; $t \in [0, \pi]$.

144. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \cos \dfrac{t}{2}$; $t \in \mathbf{R}$.

145. $x^3 = 3a^2 y$, $2xz = a^2$.

146. Naći jedinične vektore trobrida pratioca krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t \}$$

i pokazati da oni zatvaraju konstantne kutove s osi OZ. *

147. Dokazati da se vektori trobrida pratioca krivulje:

$$\vec{r} = \{ t,\ t^2,\ t^3 \}$$

u točki $O = (0, 0, 0)$ podudaraju s jediničnim vektorima koordinatnih osi.

148. Naći vektore trobrida pratioca krivulje:

$$\vec{r} = \{ \cos t + \sin^2 t;\ \sin t (1 - \cos t);\ -\cos t \}$$

u točki $t = \dfrac{\pi}{2}$.

149. Napisati jednadžbe ravnina koje čini trobrid pratilac krivulje:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

u točki $M = (1, 1, 2)$.

---

* Ako u daljnjem tekstu ne bude istaknuta točka u kojoj računamo izvjestan podatak, smatrat ćemo da se radi o proizvoljnoj točki.

150. Naći trobrid pratilac prostorne parabole:

$$\vec{r} = \{3t, 3t^2, 2t^3\}.$$

151. Dokazati da je geometrijsko mjesto točaka glavnih normala koje su udaljene za dužinu l od točaka obične zavojnice $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$$

opet obična zavojnica.

152. Od svake točke krivulje:

$$x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ z = 4a\sin\frac{t}{2}$$

na njenoj glavnoj normali nanesen je segment dužine $a\sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}$.

Naći jednadžbu krivulje koju opisuje krajnja točka tog segmenta.

153. Naći točke na krivulji $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = \frac{2}{t},\ y = \ln t,\ z = -t^2,$$

u kojima je binormala paralelna s ravninom $x - y + 8z + 2 = 0$.

154. Na binormale krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$x = \cos\beta\cos t$, $y = \cos\beta\sin t$, $z = t\sin\beta$, gdje je β parametar, naneseni su u pozitivnom smjeru odsječci konstantne duljine jednake jedinici.
Napisati jednadžbu oskulacione ravnine nove krivulje.

155. Naći vektore trobrida pratioca krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t\sin t,\ y = t\cos t,\ z = t\mathrm{e}^t$$

u ishodištu koordinatnog sustava.

156. Naći trobrid pratilac Vivijanieve krivulje (vidi zad. 55):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = ax,$$

te jednadžbe tangente, binormale i glavne normale.

Rješenja

101. $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-4}{3}.$

102. $\dfrac{x+2}{27}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{4}.$ **103.** $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{0}.$

104. $\dfrac{x+1}{47}=\dfrac{y-1}{37}=\dfrac{z-6}{14}.$ **105.** $x=y+1=z.$ **106.** $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{2},\ \phi=\dfrac{\pi}{4}.$

107. $M_1=(-2,\ 12,\ 14)$ i $M_2=(-4,\ 3,\ -4).$

108. $\dfrac{X-a\operatorname{ch}t}{a\operatorname{sh}t}=\dfrac{Y-a\operatorname{sh}t}{a\operatorname{ch}t}=\dfrac{Z-ct}{c}$ **109.** $\phi=\dfrac{\pi}{2}.$

110. S ravninom YOZ tangenta je paralelna u točkama $A_1=(2,\ 3,\ 4)$ i $A_2=(-2,\ 3,\ -4)$, a s ravninom XOZ u točki $B=(0,\ 0,\ 0)$.

111. $x^2+y^2=2a^2.$ **112.** $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2},\ y+2z=0.$

113. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3};\quad x+2y+3z-5=0.$

Presjek tangenata i ravnine XOY jest $y=\dfrac{3}{4}x^2.$

114. $\dfrac{X-x}{2yz}=\dfrac{Y-y}{z(a-2x)}=\dfrac{Z-z}{-ay};\quad 2yzX+z(a-2x)Y-ayZ=0.$

115. $\alpha=[t^2(a^2+b^2)]^{1/2}=|t|\,k.$ **116.** $\phi=\dfrac{\pi}{2}.$

118. Prema zadacima 62. i 97. imamo:

Kružnica: $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{a^2+b},\quad z=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

119. Neka je krivulja: $\vec{r}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$, tada vrijedi:

$$F\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}\equiv 0.$$
$$\Phi\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}\equiv 0.$$

Diferenciramo li ove jednadžbe:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy+\frac{\partial F}{\partial z}\,dz=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz=0,$$

tada su diferencijali u odnosu:

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Na taj način jednadžba tangente glasi:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

a jednadžba normalne ravnine:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

120. $\frac{X-x}{ay} = \frac{Y-y}{bx} = \frac{Z-z}{xy}$; $\quad ay(X-x) + bx(X-x) + xy(Z-z) = 0.$

121. $z(X-x) + x(Z-z) = 0.$ **122.** $\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1.$ **123.** $(0, 0, 0).$

124. $e^{-t}X - e^{t}Y - \sqrt{2}Z + 2t = 0.$

125. $3x + 3y + z + 1 = 0, \quad 3x - 3y + z - 1 = 0, \quad 108x - 18y + z - 216 = 0.$

126. $4\cos t X - 4\sin t Y - 3Z - \cos 2t = 0.$ **127.** $-aX + Z = 0.$

128. $bX - aY + abZ = 2ab.$ **130.** $4x - y + z - 9 = 0.$

131. $x + y + z = 0.$ **132.** $4x + 3y + 2z - 5a = 0.$

133. $Z = ay + b.$ **134.** $\sqrt{b}x - \sqrt{a}y = 0.$

138. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$, jednadžba glavne normale,

$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$, jednadžba binormale.

139. $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$ – glavna normala,

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ – binormala.

140. $\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{y-\dfrac{2}{3}}{1}=\dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{-2}$ – glavna normala,

$\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{y-\dfrac{2}{3}}{-2}=\dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{1}$ – binormala.

141. $\dfrac{x-1}{31}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z-1}{-22}$ – glavna normala,

$\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-1}{-1}$ – binormala.

142. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ – glavna normala,

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$ – binormala.

143. $\vec{t}^{\,0}=\left\{-\dfrac{3}{5}\cos t,\ \ \dfrac{3}{5}\sin t,\ \ -\dfrac{4}{5}\right\}$,

$\vec{n}^{\,0}=\{\sin t,\ \cos t,\ 0\}$, $\quad \vec{b}^{\,0}=\left\{\dfrac{4}{5}\cos t,\ \ -\dfrac{4}{5}\sin t,\ \ -\dfrac{13}{5}\right\}$.

144. $\vec{t}^{\,0}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{t}{2},\ \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{t}{2},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\quad \vec{n}^{\,0}=\left\{\cos\dfrac{t}{2},\ \ -\sin\dfrac{t}{2},\ 0\right\}$,

$\vec{b}^{\,0}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{t}{2},\ \ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

145. $\vec{t}^{\,0}=\dfrac{1}{2x^4+a^4}\{2a^2x^2,\ 2x^4,\ -a^4\}$,

$\vec{n}^{\,0}=\dfrac{1}{2x^4+a^4}\{a^4-2x^4,\ 2a^2x^2,\ 2a^2x^2\}$,

$\vec{b}^{\,0}=\dfrac{1}{2x^4+a^4}\{2a^2x^2,\ -a^4,\ 2x^4\}$.

146. $\vec{t}^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{\cos t-\sin t;\ \cos t+\sin t,\ 1\}$,

$\vec{n}^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{-(\cos t+\sin t),\ (\cos t-\sin t),\ 0\}$,

$\vec{b}^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\{(\sin t-\cos t;\ -(\sin t+\cos t);\ 2\}$.

$\cos\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\gamma_2=0$, $\cos\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

148. $\vec{t}^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{-1,\ 1,1\}$; $\quad \vec{n}^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{42}}\{-5,\ -4,\ 1\}$; $\quad \vec{b}^{\,0}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\{1,\ -2,\ 3\}$.

149. $2x - z = 0$ – normalna ravnina;

$y - 1 = 0$ – oskulaciona ravnina;

$x + 2z - 5 = 0$ – rektifikaciona ravnina.

150. $\vec{t}^0 = \dfrac{1}{1+2t^2}\{1;\ 2t;\ 2t^2\};$

$\vec{n}^0 = \dfrac{1}{(1+2t^2)^2}\{-2t;\ 1-2t^2,\ 2t\};$

$\vec{b}^0 = \dfrac{1}{(1+2t^2)^2}\{2t^2;\ -2t;\ 1\};$

$(x-3t) + 2t(y-3t^2) + 2t^2(z-2t^3) = 0$ – normalna;

$-2t(x-3t) + (1-2t^2)\ (y-3t^2) + 2t(z-2t^3) = 0$ – rektifikaciona;

$2t^2(x-3t) - 2t(y-3t^2) + (z-2t^3) = 0$ – oskulaciona;

151. Prema zad. 97. glavna normala ima parametarske jednadžbe:

$$\begin{aligned} X &= a\cos t - \lambda a(a^2+b^2)\cos t \\ Y &= a\sin t - \lambda a(a^2+b^2)\sin t \qquad (*) \\ Z &= bt. \end{aligned}$$

Odaberimo λ tako da bude udaljenost $\overline{AB}^2$ jednaka l^2, gdje je točka $A = (X,\ Y,\ Z)$ na glavnoj normali, a $B = (x,\ y,\ z)$ na zavojnici.

Izlazi: $\lambda = \pm \dfrac{l}{a(a^2+b^2)}$. Ako je $l > a$, tada je $\lambda < 0$, pa je traženo geometrijsko mjesto opet zavojnica:

$$x = (a+l)\cos t,\ \ y = (a+l)\sin t;\ \ z = bt.$$

Ako je $l < a$, tada je $\lambda > 0$, geometrijsko mjesto točaka na glavnoj normali je opet zavojnica:

$$x = (a-l)\cos t,\ \ y = (a-l)\sin t,\ \ z = bt.$$

Ploha što je čine sve glavne normale dana je gornjim jednadžbama (*). Eliminiramo li t i λ, imamo:

$$\frac{y - a\sin t}{x - a\cos t} = \operatorname{tg} t,\ \text{tj.}\ \ y = x \operatorname{tg} t.$$

Iz $t = \dfrac{z}{b}$ ploha što je čine sve glavne normale zavojnice (heliks) ima jednadžbu:

$y = x \operatorname{tg} \dfrac{z}{b}$ i zove se helikoid (vidi sl. 40 na str. 110).

152. $z = 3a\sin\dfrac{x}{2a}$.

153. $A = (1,\ \ln 2,\ -4)$.

154. $\sin\alpha\sin(t-\alpha)X\text{-}\sin\alpha\cos(t-\alpha)Y + Z = t\sin\alpha + \cos\alpha$.

155. $\vec{t}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k});\qquad \vec{n}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k});\qquad \vec{b}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}).$

156. Korišteći parametarske jednadžbe:

$$x = \frac{a}{2}(1+\cos t), \qquad y = \frac{a}{2}\sin t, \qquad z = a \sin\frac{t}{2}, \text{ imamo:}$$

$$\vec{t}^{0} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}}\left\{-\sin t,\ \cos t,\ \cos\frac{t}{2}\right\};$$

$$\vec{b}^{0} = \sqrt{\frac{2}{13+3\cos t}}\left\{\sin\frac{t}{2}(2+\cos t);\quad -\cos\frac{t}{2}(1+\cos t);\quad 2\right\};$$

$$\vec{n}^{0} = \frac{1}{\sqrt{Q}}\left\{\left[-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t)-2\cos t\right];\quad -\frac{1}{2}\sin t(6+\cos t);\quad -\sin\frac{t}{2}\right\},$$

gdje je:

$$Q = \left[-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t)-2\cos t]^2 + \frac{1}{4}\sin^2 t(6+\cos t)^2 + \sin^2\frac{t}{2}\right].$$

Nadalje je tangenta:

$$\frac{X-\frac{a}{2}(1+\cos t)}{-\sin t} = \frac{Y-\frac{a}{2}\sin t}{\cos t} = \frac{Z-a\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}};$$

binormala:

$$\frac{X-\frac{a}{2}(1+\cos t)}{\sin\frac{t}{2}(2+\cos t)} = \frac{Y-\frac{a}{2}\sin t}{-\cos t\frac{t}{2}(1+\cos t)} = \frac{Z-a\sin\frac{t}{2}}{2}.$$

glavna normala:

$$\frac{X-\frac{a}{2}(1+\cos t)}{-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t)-2\cos t} = \frac{Y-\frac{a}{2}\sin t}{-\frac{1}{2}\sin t(6+\cos t)} = \frac{Z-a\sin\frac{t}{2}}{-\sin\frac{t}{2}};$$

normalna ravnina:

$$\sin t X - \cos t Y - \cos\frac{t}{2} Z = 0;$$

oskulaciona ravnina:

$$\sin\frac{t}{2}(2+\cos t)X - \cos\frac{t}{2}(1+\cos t)Y + 2Z - \frac{a}{2}\sin\frac{t}{2}(5+\cos t) = 0;$$

rektifikaciona ravnina:

$$\left[-\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t)-2\cos t\right]X - \frac{1}{2}\sin t(6+\cos t)Y - \sin\frac{t}{2}Z + \frac{a}{4}(3+\cos t)^2 = 0.$$